Module probabilités et statistique _ partie7

Zahra ROYER

→ Les lois classiques de base

- ***Loi Binomiale***
- ***Loi de Poisson***
- ***Loi de Laplace-Gauss dite loi Normale***

→ Loi Binomiale :

Elle est définie par une répétition d'expériences à deux issues et uniquement 2.
*On doit penser à elle chaque fois que le caractère étudié est **discret** et se présente sous la forme suivante :*
1°) On a observé un caractère à deux valeurs sur une population de n individus : être malade ou absent ou avoir une panne...et on a constaté un pourcentage p qui revient à chaque fois
*2°) Si on note X le nombre d'individus ayant ce caractère on dit que : X suit une **Loi Binomiale notée B(n; p).** Concrètement cela veut dire que l'on peut calculer la probabilité que k individus aient ou non le caractère en question :*

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

→ Loi de Poisson :

C'est une loi qui caractérise des événements identiques qui se succèdent dans le temps tels que : entrée dans un bureau de poste ; demandes de carburants ; les entrées dans un magasin ; des passages de véhicules sur un périphérique ou autoroute ; des appels reçus a un standard ; des connections WEB...
*Si par un calcul répété sur le phénomène X observé on constate souvent que la variance et la moyenne sont voisines on peut aussi penser à la **loi de Poisson.** On dit alors que :*
*X suit une **Loi de Poisson : P(m) (pour les événements dans le temps m désigne souvent at où : a est le taux des arrivées et t le temps moyen.***
et concrètement cela veut dire que l'on peut calculer la probabilité que k individus aient ou non le caractère en question :

$$P(X=k)=\frac{m^k e^{-m}}{k!}$$

Remarque : (pour les événements dans le temps m désigne souvent at où : a est le taux des arrivées et t le temps moyen. Ce qui donne le sens suivant à l'expression : P(X=k) est la probabilité d'avoir k d'arrivées jusqu'à l'instant t.

→ *Loi de Laplace-Gauss dite loi Normale :*

§_1 On rencontre cette loi très souvent, à chaque fois que le praticien doit traiter une variable continue dont les causes sont nombreuses et mal connues sans qu'on puisse détecter entre eux une prépondérance.

§_2 Très présente dans de nombreux domaines : médecine, biologie, finance, logistique, transport, pression atmosphérique ; imprécisions des appareils ; usure de l'outillage ; ...

§_3 C'est une loi à deux paramètres : moyenne et écart-type notée ; et la loi standard de moyenne 0 et d'écart type 1 est tabulée.
Les logiciels des statistiques proposent des calculs de probabilités, directes, de quantiles, de seuils critiques.

§_4 Si on note X le caractère étudié et si X suit une loi N(m ; σ) on peut à l'aide de cette loi calculer les probabilités que : X dépasse ; soit en dessous ; ou entre deux valeurs. Elle donne les valeurs cumulées et non les valeurs exactes

§_5 ***Concrètement*** *on procède comme suit*
On centre et on réduit ***X*** *pour se ramener à une variable unique* ***z*** *dite la centrée réduite de* ***X****. la nouvelle variable z suit la seule loi universelle et applicable à tout les phénomènes gaussiens. Cette loi s'appelle la loi normale standard, elle est notée N(0 ; 1) et est donnée par les tables.*

si X ≈ N(m ; σ***) alors :*** $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ ***suit la loi standard N(0 ; 1)***

$P(X \leq k) = P(T \leq \dfrac{k - m}{\sigma}) = \pi(t)$ où $t \geq 0$ *directement lisible dans lorsque k >m.*

On pourra retenir les résultats suivants :

- $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = P(-1 \leq T \leq 1) = \pi(1) - \pi(-1) = 2\pi(1) - 1 = 0.68$
- $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq T \leq 2) = \pi(2) - \pi(-2) = 2\pi(2) - 1 = 0.95$
- $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = P(-3 \leq T \leq 3) = \pi(3) - \pi(-3) = 2\pi(3) - 1 > 0.99$

Exercice d'application directe :

La demande d'un produit suit une loi de Gauss de moyenne 100 et d'écart-type 10.
1- Calculer la probabilité pour que la demande soit inférieure à 105,5.
2- Calculer la probabilité pour que la demande soit supérieure à 124
3- Calculer la probabilité pour que la demande soit comprise entre 110 et 129.
Corrigé : ici la variable demande $X \approx N(m\,;\sigma)$, avec m= 100 et σ =10

1- $P(X \leq 105.5) = \pi\left(\frac{105.5 - 100}{10}\right)$

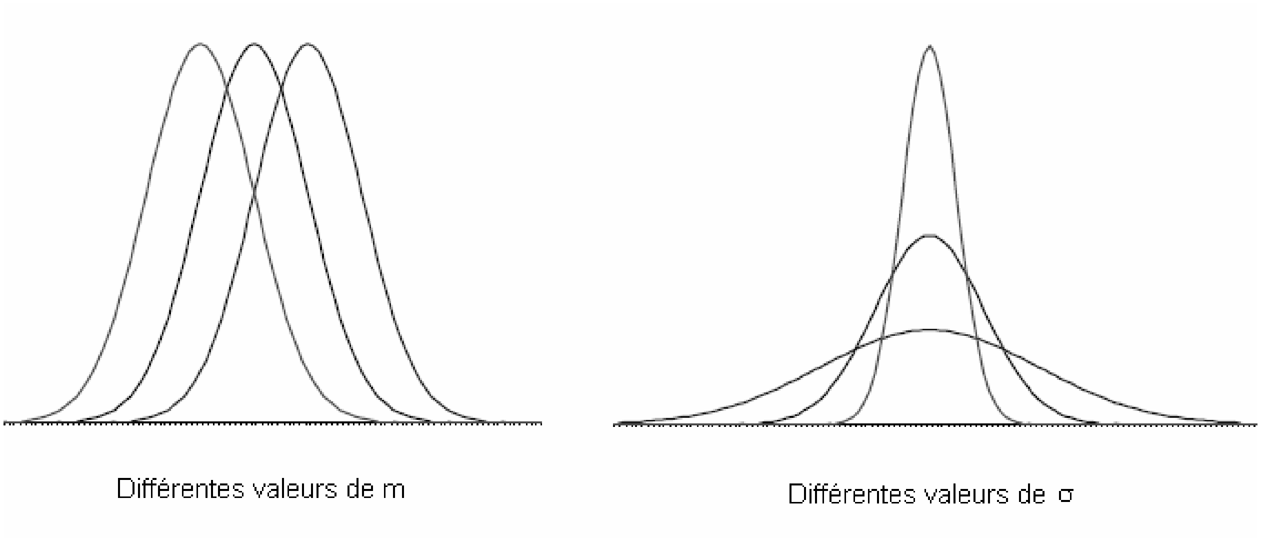
2- $P(X \geq 124) = 1 - P(X \leq 124) = 1 - \pi\left(\frac{124 - 100}{10}\right)$

3- $P(110 \leq X \leq 129) = P(X \leq 129) - P(X \leq 110) = \pi\left(\frac{129 - 100}{10}\right) - \pi\left(\frac{110 - 100}{10}\right)$

Dans ce qui suit, on doit noter que l'on se ramène automatiquement à la loi normale standard.

$$p(k) = p(X \leq k) = p\left(T \leq \frac{k - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k - m}{\sigma}\right)$$

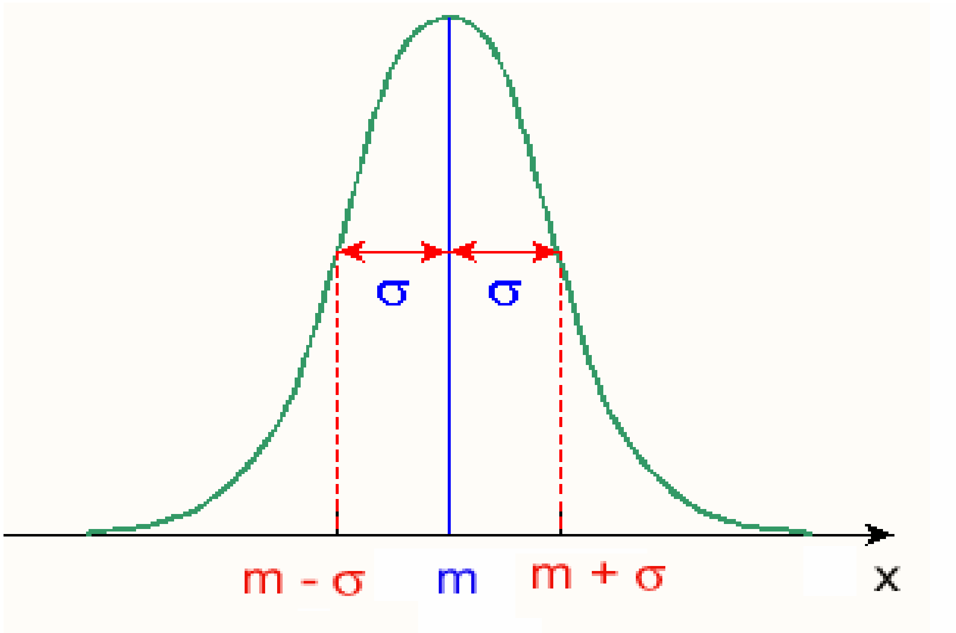
$$lorsque, X \rightarrow N(m;\sigma)$$



Les lignes suivantes constituent une base très simple qui permet de calculer les valeurs à partir de la table : Φ ou Π sont les lettres utilisées pour les probabilités

$$\begin{aligned}
&si \quad t \geq 0 \\
&\pi(t) = P(T \leq t) = P(T \geq -t) \\
&\pi(-t) = P(T \leq -t) = 1 - \pi(t) \\
&si \quad t < 0 : \\
&\pi(-t) = 1 - \pi(t) \\
&P(a \leq T \leq b) = \pi(b) - \pi(a) \\
&\pi(0) = 0{,}5 \\
&\pi(-a \leq T \leq a) = 2\pi(a) - 1
\end{aligned}$$

Le schéma ci-dessous désigne une fourchette centrée autour de la moyenne d'amplitude 2 fois l'écart-type.

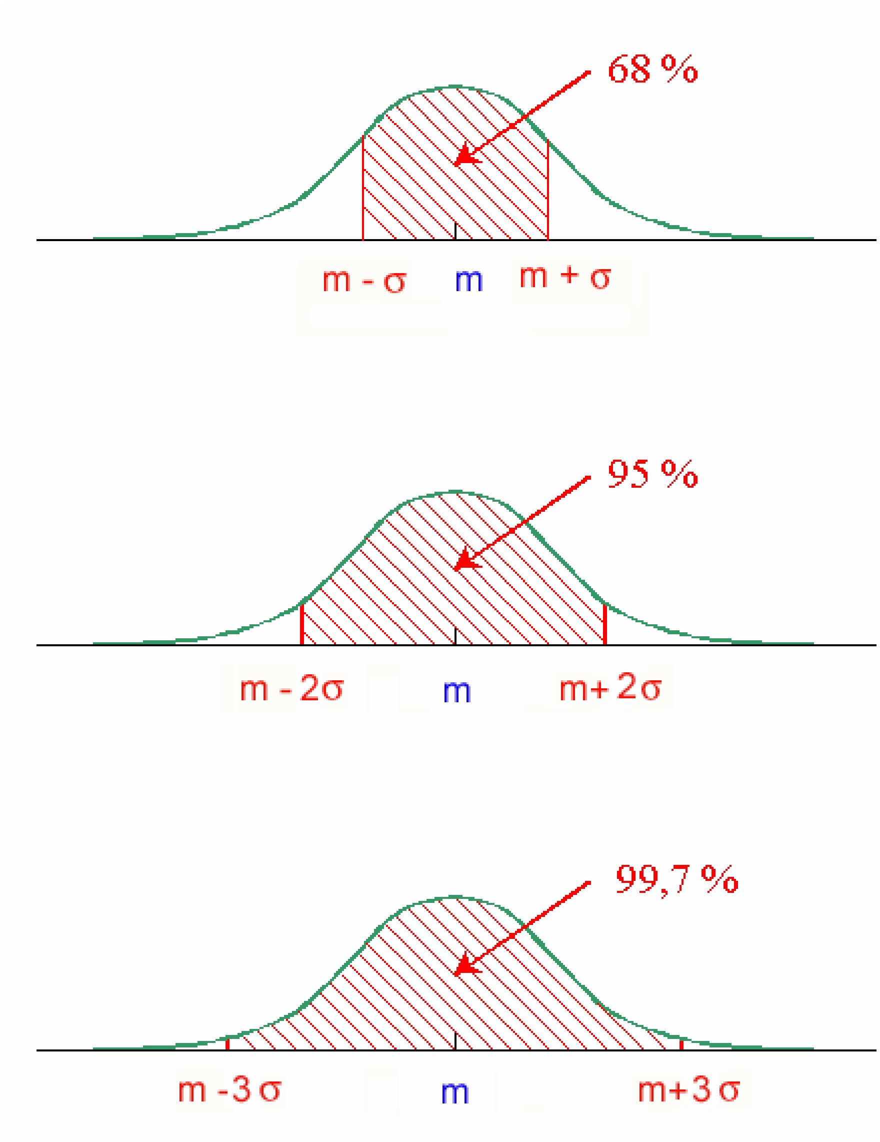


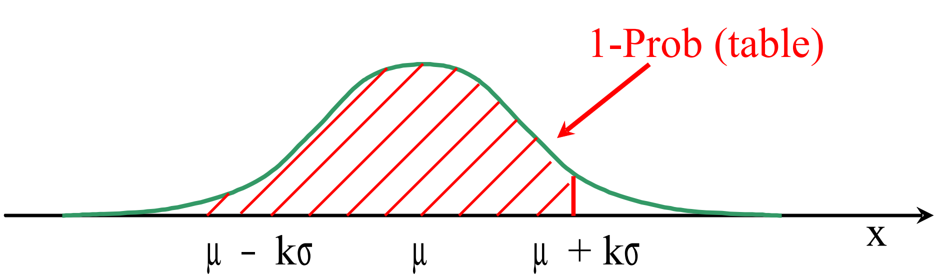
Le schéma qui suit résume ce que l'on a introduit en statistique (module PS_3) :
Lorsque l'historique statistique laisse penser à une distribution dite "normale" loi de Laplace-Gauss parfaitement symétrique, on montre que :

- *environ 68% des valeurs sont comprises entre* $\bar{x} - \sigma$ *et* $\bar{x} + \sigma$
- *environ 95% des valeurs sont comprises entre* $\bar{x} - 2\sigma$ *et* $\bar{x} + 2\sigma$
- *environ 99% des valeurs sont comprises entre* $\bar{x} - 3\sigma$ *et* $\bar{x} + 3\sigma$

On retient que :

- *La loi normale est la loi statistique la plus répandue et la plus utile.*
- *Elle représente beaucoup de phénomènes aléatoires.*
- *De plus, de nombreuses autres lois statistiques peuvent être approchées par la loi normale, tout spécialement dans le cas des grands échantillons.*
- *Sa facilité pour les utilisateurs peut amener à commettre des erreurs et donc PRUDENCE*


68 %
m - σ
m
m + σ
95 %
m - 2σ
m
m+ 2σ
99,7 %
m -3 σ
m
m+3 σ


1-Prob (table)
μ - kσ
μ
μ + kσ
x

<u>Méthodologie :</u>

1. *Lire le texte de données très attentivement*
2. *Déterminer avec précision les variables aléatoires à étudier, en écrivant en toute lettre le nom de la variable étudiée.*
3. *Comprendre la nature de la variable aléatoire : discrète, continue,*
4. *Si la loi de la variable étudiée est explicite, noter avec précision les probabilités d'obtenir :*
   - *Un nombre k de succès,*
   - *Plus de k succès*
   - *Moins de k succès,*
   - *Au plus k succès,*
   - *Au moins k succès*
5. *Pour mieux comprendre les calculs, rédiger des conclusions en termes de pourcentages, résumant concrètement les calculs.*
6. *LIRE l'AIDE d'EXCEL*

Exercice 1 :

***Soit** un parc de 40 PC ; le technicien évalue que 9% des machines sont H.S.*
Calculer la probabilité d'avoir : 0 ; 1 ; 2 ...6 machines H.S.
Corrigé :
La variable à étudier X « Nombre de PCHS » suit naturellement une loi binomiale
$B(40;0.09)$

xi	pi	%
0	0,02299618	2,29961797
1	0,090973898	9,09738975
2	0,17544966	17,544966
3	0,219794079	21,9794079
4	0,201075352	20,1075352
5	0,143183328	14,3183328
6	0,082605766	8,26057661

Comme np =3.6, n(1-p)=36.8, np(1-p)=3.31, on peut obtenir des résultats similaires, en approchant la loi binomiale par la loi de Poisson de paramètre λ=3.6 et les tableau suivant donne les probabilités demandées :

xi	p'i	%
0	0,027323722	2,73237224
1	0,098365401	9,83654008
2	0,177057721	17,7057721
3	0,212469266	21,2469266
4	0,191222339	19,1222339
5	0,137680084	13,7680084
6	0,082608051	8,26080505

Exercice 2 :

***Une** entreprise de transport qui emploie 50chauffeurs s'intéresse à leur santé. Le bilan est que 5% seulement souffre de problèmes vision. Soit un lot de 10 routiers. Calculer la probabilité d'avoir 0 ; 1 ; 2 ; plus de 2 personnes qui souffre de vision.*

Corrigé : le tableau qui suit donne les résultats

X	*Binomiale (10 ;5%)=pi*	*Effectifs= 50*pi*
0	*0,59873694*	*29,936847*
1	*0,3151247*	*15,7562352*
2	*0,0746348*	*3,73173993*
3	*0,01047506*	*0,52375297*
4	*0,00096481*	*0,04824041*
5	*6,0935E-05*	*0,00304676*
6	*2,6726E-06*	*0,00013363*

X	*Poisson : 0,05*	
0	*0,60653066*	*30,326533*
1	*0,30326533*	*15,1632665*

2	*0,07581633*	*3,79081662*
3	*0,01263606*	*0,63180277*
4	*0,00157951*	*0,07897535*
5	*0,00015795*	*0,00789753*
6	*1,3163E-05*	*0,00065813*

Exercice 3 :

***Un** stock de matières dangereuses dans un laboratoire pharmaceutique suit une B(50 ; p). Combien est p la probabilité de fuite si le gérant souhaite que la probabilité d'avoir 0 unité est 0.85.*

Corrigé : X : « nombre d'unité mal stockées » suit une B(50 ; p)

$$P(X=0)=\binom{0}{50}p^0(1-p)^{50}=0.85$$

$$p=1-0.85^{\frac{1}{50}}=0,0032451$$

Exercice 4 :

***Un** logisticien assure les suivis qualité dans une entreprise spécialisée en matériels informatique. Il a remarqué que X= le nombre de fiches signalant un retard dans la livraison suit une loi binomiale B(6 ; 0,5). Calculer la probabilité qu'il ait : X=0 ; 1 ; 2...6.*

Calculer la probabilité qu'il ait moins de 3 fiches

xi	pi	cumulative
0	0,015625	0,015625
1	0,09375	0,109375
2	**0,234375**	**0,34375**
3	0,3125	0,65625
4	0,234375	0,890625
5	0,09375	0,984375
6	0,015625	1

La probabilité qu'il ait moins de 3 fiches est obtenue par cumul, elle est ***en gras dans le tableau***

Exercice 5 :

Une hotline a enregistré que le nombre moyen d'appels téléphoniques est de 1.8 appel/mn.
Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait pas d'appels ; qu'il y en ait un seul, deux, au moins deux appels.
X = « le nombre d'appels téléphoniques au standard par minute ».
X suit une loi P(λ) avec : λ=1.8 appel/mn

xi	pi	cumulative
0	0,16529889	0,16529889
1	0,297538	0,46283689
2	0,2677842	0,73062109
3	0,16067052	0,89129161
4	0,07230173	0,96359334

$P(X=0)= 0,16529889$
$P(X=1)= 0,297538$
$P(X=2)= 0,2677842$
$P(X>1)= p(X\geq 2)= 1-P(X\leq 1) = 1- 0,46283689= 0,5371$

Exercice 6 *:*

Soit X la variable qui mesure la rentabilité globale (c'est le rapport du bénéfice au capital employé). Pour l'entreprise FUTURCOM, X suit une loi normale de moyenne 115 et d'écart-type 45.

1) *calculer la probabilité que la rentabilité globale dépasse 225*
2) *calculer la probabilité que cette rentabilité ne dépasse pas 217*
3) *calculer la probabilité que ce ratio économique soit compris entre 75 et 230.*
4) *Trouver la fourchette centrée autour de la moyenne, contenant la rentabilité dans 97.05% des cas.*

Corrigé :

1) *X suit une loi normale N (115 ; 45), donc $P(X\geq 225)=1- P(X\leq 225)$.*

On centre et on réduit pour utiliser la table :

On pose : $U = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 115}{45}$

Et $P(X\geq 225)=1- P(X\leq 225)=1-P\left(U \leq \frac{225 - 115}{45}\right) = 1-\pi(2.44)$ *et d'après la table* $= 1- 0,99274623= 0,00725377$

Il y a 0.725% de chances de dépasser une rentabilité de 225.

2) $P(X\leq 217)= P\left(U \leq \frac{217 - 115}{45}\right) =0,9882947$*, dans 98,8% de cas la rentabilité reste en dessous de 217.*

3) $P(75\leq X\leq 230)= P(X \leq 230) - P(X \leq 75) = \pi\left(\frac{230 - 115}{45}\right) - \pi\left(\frac{75 - 115}{45}\right) =$ $0,99469908 - 0,1870314= 0,80766768$

4) *La fourchette centrée autour de la moyenne s'écrit : $[m\pm a]$:*

$$P(m - a \leq X \leq m + a) = 0.9705$$

$$P(m - a \leq X \leq m + a) = P(X \leq m + a) - P(X \leq m - a)$$

$$= P\left(U \leq \frac{a}{\sigma}\right) - P\left(U \leq -\frac{a}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \pi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 = 0.9705 \quad \text{donc}$$

$$\pi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{1.9705}{2} = \pi\,(2,17673963)$$

$$\frac{a}{\sigma} = 2,17673963$$

$$a = 2,17673963 * \sigma$$

$$a = 97,9532831$$

La fourchette contenant la rentabilité ainsi distribuée, dans 97.05% des cas, est donc : $[115 \pm 97.953]$

Exercice 7

L'entreprise SUPERMECA est très soucieuse de livrer ses clients à temps.
Parmi tous les indicateurs qui contribuent à augmenter son efficacité il y a le ratio technique X, qui mesure le rendement du travail.
*Plus exactement c'est X : « **Production/nombre d'heures-hommes »considérée comme une variable aléatoire continue**.*
L'entreprise a constaté au vu de ses anciennes statistiques que ce ratio X est une variable suivant une loi normale de moyenne inconnue m, avec un écart-type de 10.
Nous savons que ce ratio dépasse 99.2 dans 99.5% des cas.
Trouver le ratio moyen de cette entreprise.
Calculer alors la fourchette centrée autour de cette moyenne ou le ratio se trouve dans 75% des cas.

Corrigé : Calcul du ratio moyen de cette entreprise

$$P(X \geq 99.2) = 0.995$$

$$= P(U \geq \frac{99.2 - m}{10}) = 0.995$$

$$= 1 - \pi(\frac{99.2 - m}{10}) = 0.995$$

On sait que : $= \pi(\frac{m - 99.2}{10}) = 0.995 = \pi(2{,}5758293)$

$$\frac{m - 99.5}{10} = 2{,}5758293$$

$$\text{donc} \quad m = 10 * 2{,}5758293 + 99.5$$

$$m = 125.25$$

On peut conclure que la variable suit la loi N(125.25 ; 10)
Pour la dernière question revoir la question identique de l'exercice précédent.