Module Mathématiques pour l'Informatique_ partie 2

Zahra Royer-SafouanaTabiou

Exercice 1 (corrigé)

1.Formaliser les propositions suivantes en utilisant uniquement les prédicats indiqués, les connecteurs logiques et les quantificateurs :

a) Personne n'est parfait : $p(x)$: « x est parfait »

b) 0 est multiple de tout entier : $p(n,m)$: « n divise m » ; $q(x)$: « x est un entier »

c) Les absents n'ont pas tous tort : $a(x)$: « x est absent » ; $t(x)$: « x a tort »

2. a) Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux prédicats. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\text{non}(\forall x \in E,\ p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ p(x) \wedge (\neg q(x)))$$

b) Soit $p(x,y)$ un prédicat à deux variables. Démontrer que l'assertion suivante est une tautologie :

$$\text{non}(\exists x \in E,\ (\forall y \in F,\ p(x,y))) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ (\exists y \in F,\ \neg p(x,y)))$$

3. Ecrire la négation des propositions suivantes :

a) $\exists x \in E,\ p(x) \wedge q(x)$

b) $\forall x \in E,\ p(x) \Rightarrow q(x)$

c) $\forall x \in E,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$

d) $\forall x \in E, \forall y \in F,\ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \Rightarrow r(x,y)$

e) $\exists x \in E, \forall y \in F,\ q(x,y) \Rightarrow (p(x,y) \vee r(x,y))$

Slution

1. a) On note E l'ensemble des personnes : si $x\in E$ l'assertion $p(x)$ est « x est parfait » alors la proposition Personne n'est parfait s'écrit formellement : $\forall x\in E,\ \neg p(x)$

b) 0 est multiple de tout entier s'écrit : $\forall x,\ q(x)\Rightarrow p(x,0)$

c) Les absents n'ont pas tous tort s'écrit $\exists x,\ \mathrm{non}(q(x)\Rightarrow t(x))$.

2. a) Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux prédicats. D'après le théorème 1.1 a), $\mathrm{non}(\forall x\in E,\ p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in E,\ \mathrm{non}(p(x)\Rightarrow q(x)))$, or $\mathrm{non}(p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow p(x)\wedge(\neg q(x))$ par conséquent $\mathrm{non}(\forall x\in E,\ p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in E,\ p(x)\wedge(\neg q(x)))$ une tautologie

b) par le théorème 1.1 b), $\mathrm{non}(\exists x\in E,\ (\forall y\in F,\ p(x,y)))\Leftrightarrow(\forall x\in E,\mathrm{non}\,(\forall y\in F,\ p(x,y)))$; d'autre part $\mathrm{non}\,(\forall y\in F,\ p(x,y))\Leftrightarrow(\exists y\in F,\ \neg p(x,y))$.

Il vient $\mathrm{non}(\exists x\in E,\ (\forall y\in F,\ p(x,y)))\Leftrightarrow(\forall x\in E,\ (\exists y\in F,\ \neg p(x,y)))$

3. Ecrire la négation des propositions suivantes :

a) $\mathrm{non}(\exists x\in E,\ p(x)\wedge q(x))\Leftrightarrow(\forall x\in E,\ \neg p(x)\vee\neg q(x))$

b) On sait que $\mathrm{non}(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)$. Donc $\mathrm{non}(\forall x\in E,\ p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in E,\ non(p(x)\Rightarrow q(x)))\Leftrightarrow(\exists x\in E,\ p(x)\wedge\neg q(x))$

c) $\mathrm{non}(\forall x\in E,\ p(x)\Leftrightarrow q(x))\Leftrightarrow(\exists x\in E,\ \mathrm{non}(p(x)\Leftrightarrow q(x)))$

En reprenant la table la table de vérité de l'équivalence, on obtient

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\mathrm{non}(p\Leftrightarrow q)$
0	0	1	0
0	1	0	1

1	0	0	1
1	1	1	0

vraie et fausse dans les autres cas. On en déduit donc que $\text{non}(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \oplus q)$ (confer tautologie usuelle n° 15).
Par conséquent $\text{non}(\forall x \in E,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ p(x) \oplus q(x))$

d) $\text{non}(\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \Rightarrow r(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \exists y \in F, \text{non}(p(x,y) \wedge q(x,y)) \Rightarrow r(x,y))$

$\Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \exists y \in F, (p(x,y) \wedge \neg r(x,y)) \wedge (q(x,y) \wedge \neg r(x,y)))$

e) $\text{non}(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ q(x,y) \Rightarrow p(x,y) \vee r(x,y)) \Leftrightarrow$
$(\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ (q(x,y) \wedge \neg p(x,y)) \wedge (q(x,y) \wedge \neg r(x,y)))$

<u>Exercice 2 (avec indications)</u>

1. La proposition : $(\forall x,\ \exists y : p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y,\ \forall x :\ p(x,y))$ est :
a) Une tautologie
b) Une antiologie
c) Ni l'un ni l'autre

2. Quelle est la négation de la proposition : $(\exists ! x :\ p(x))$?
   a) $(\exists x : \neg p(x))$
   b) $(\forall x :\ \neg p(x))$
   c) $(\exists y, z :\ y \neq z\ , p(y) \wedge p(z))$
   d) $(\forall x :\ \neg p(x)) \vee (\exists y, z :\ p(y) \wedge p(z) \Rightarrow y \neq z)$
   e) $(\forall x : \neg p(x)) \wedge (\exists y, z :\ p(y) \wedge p(z) \Rightarrow y \neq z)$

3 . Formaliser les énoncés suivants :
a) Tout étudiant en informatique est bon en mathématiques

b) Tout étudiant en informatique possède un ordinateur fixe et un ordinateur portable.
c) Certains étudiants ne possèdent pas d'ordinateur.

4. Soient les prédicats suivants : $E(x): x$ est un étudiant ; $V(x): x$ est un vélo ; $p(x,y):$ x possède y. Traduire en langage courant les énoncés suivants
a) $\forall\, x : V(x) \Rightarrow (\exists\, z : E(z) \wedge p(z,x))$
b) $\exists\, x : c(x) \wedge (\forall\, y : v(y) \Rightarrow \neg\, p(x,y))$
c) $\forall\, x : c(x) \wedge (\forall\, z, y : (V(z) \wedge V(y) \wedge (z \neq y)) \Rightarrow \neg\, p(x,y) \vee \neg\, p(x,z))$

Indications et commentaires

1. il est clair que $(\exists\, y,\ \forall\, x :\ p(x,y)) \Rightarrow (\forall\, x,\ \exists\, y : p(x,y))$ est une tautologie. Sa réciproque n'est pas en général vraie. En mathématiques, on a beaucoup de notions et résultats énoncés sous la forme $(\forall\, x,\ \exists\, y : p(x,y))$: résolution d'équations, continuité de fonctions. Les énoncés du types $(\exists\, y,\ \forall\, x :\ p(x,y))$ existent en algèbre (existence de base d'espace vectoriel , d'éléments générateurs de groupe par exemple). En analyse cela se traduit souvent par la notion d'uniformité, et on cherchera alors des conditions pour réaliser cette propriété.

2. Dans le commentaire suite à la définition de $(\exists !\, x :\ p(x))$ nous avons souligné que cette proposition est une conjonction.

3. Définir clairement les prédicats qui composent chaque assertion , utiliser les quantificateurs et l'implication .

4. Dans b) et c) , utiliser la définition de l'implication en termes de disjonction .